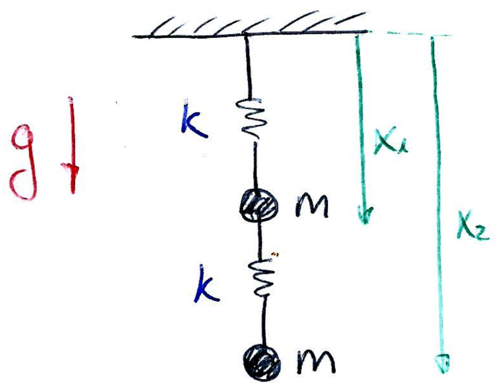

Dado el sistema:

a) Calcular el lagrangiano

b) Encontrar el cambio de coordenadas que haga que el lagrangiano sea diagonal.

c) Resolverlo

a) Para calcular el lagrangiano llamaremos "a" a la longitud natural del muelle (los muelles son iguales y las masas también)

x_1 y x_2 son las posiciones de las masas (distancia al origen. Tomando como origen el "techo")

$$L = T - V$$

- Energía cinética T:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)}$$

- Energía potencial $V = V_{elástica} + V_{gravitatoria}$

$$\boxed{V = \frac{k}{2}(x_1 - a)^2 + \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - a) - mg(x_1 + x_2)}$$

Alargamiento de los muelles con respecto a su longitud natural.

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}\left((x_1 - a)^2 + (x_2 - x_1 - a)^2\right) + mg(x_1 + x_2)}$$

b) Queremos encontrar un cambio de variable que desacople las variables del lagrangiano. Antes de eso, buscamos un cambio que elimine la constante "a".

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + a \\ x_2 = y_2 + 2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 = \dot{y}_2 \end{cases}$$

El lagrangiano queda:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{k}{2}\left(y_1^2 + (y_2 - y_1)^2\right) + mg(y_1 + y_2 + 3a)$$

La parte del lagrangiano que queda con variables acopladas es la de la V elástica:

$$\left(y_1^2 + (y_2 - y_1)^2\right) = \boxed{2y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2}$$

Escrito en forma matricial queda:

$$(y_1 \ y_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}} \qquad \boxed{\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

Los autovectores asociados:

$$(A-\lambda_i I)\vec{v}_i=\vec{0} \rightarrow$$

No lo escribo todo y pongo directamente los autovectores.

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{V_1=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \\ -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \end{pmatrix}} \qquad \boxed{V_2=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{M=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} & \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\ -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} & \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \end{pmatrix}}$$

Matriz cambio de base normalizada

Con este cambio de variable diagonalizamos el problema:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$y_1=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,z_1+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,z_2$$

$$y_2=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,z_1+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,z_2$$

Es decir, la parte del potencial electrostático $(y_1^2+(y_2-y_1)^2)$ quedará, en forma matricial como:

$$(z_1 \;\; z_2)\, D \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Con D, matriz diagonal de autovalores:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

O lo que es lo mismo:

$$\left(y_1^2 + (y_2 - y_1)^2\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} z_1^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} z_2^2$$

Por último, como el cambio que hemos realizado es en realidad una rotación, la métrica sigue siendo la misma y podemos asumir

$$\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 = \dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2$$

Con todos estos cambios, el lagrangiano en función de z queda:

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m (\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2) - \frac{k}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} z_1^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} z_2^2\right) + mg \cdot \left(\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) z_1 + \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) z_2 + 3a\right)}$$

Para que quede un poquito más elegante llamaremos

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \; ; \; \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \; ; \; P = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \; ; \; Q = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m \left(\dot z_1^2 + \dot z_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2\right) + mg\left((P-Q)z_1 + (P+Q)z_2 + 3a\right)}$$

c) Resolvemos las ecuaciones:

1.– $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_1} = 0$$

$$m\ddot z_1 - k\lambda_1 z_1 - mg(P-Q) = 0$$

$$\boxed{\ddot z_1 - \frac{k\lambda_1}{m} z_1 - g(P-Q) = 0}$$

2.– $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_2} = 0$$

$$\boxed{\ddot z_2 - \frac{k\lambda_2}{m} z_2 - g(P+Q) = 0}$$

Ambas son de la forma $y''(x) + Ay(x) + B = 0$ cuya solución es:

$$y(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{A}\, x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{A}\, x\right) + \frac{B}{A}$$

1.– $$\boxed{z_1(t) = C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k\lambda_1}{m}}\cdot t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k\lambda_1}{m}}\, t\right) - \frac{mg(P-Q)}{k\lambda_1}}$$

2.– $$\boxed{z_2(t) = C_3 \cos\left(\sqrt{\frac{k\lambda_2}{m}}\, t\right) + C_4 \cos\left(\sqrt{\frac{k\lambda_2}{m}}\cdot t\right) - \frac{mg(P+Q)}{k\lambda_2}}$$